Prof. Dr. Salma Kuhlmann,
Dr. Lothar Sebastian Krapp,
Michele Serra, Sarah Tanja Hess

Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Sommersemester 2021

Übungen zur Vorlesung Algebra II
Blatt 4

Abgabe von: Mein Name
Tutor: Mein Lieblingstutor

1	2	3	4	Σ

Allgemeiner Hinweis: Für die Bearbeitung werden alle Resultate bis einschließlich Vorlesung 8 vorausgesetzt. Freiwillige Zusatzaufgaben sind mit einem * gekennzeichnet. Alle Aussagen sind stets zu beweisen.

Definition
Sei R ein kommutativer Ring mit 1 und P ein Primideal von R, dann bezeichnet

$$\mathrm{ht}(P) := \sup\{n \in \mathbb{N}_0 \mid \exists P_0, \ldots, P_n \text{ Primideale von } R\colon P_0 \subsetneq P_1 \subsetneq \ldots \subsetneq P_n = P\} \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$$

die *Höhe von P*.

Krullscher Hauptidealsatz
Sei R ein noetherscher Integritätsbereich, $x \in R\backslash\{0\}$ und P ein Primideal das minimal bezüglich $x \in P$ ist, dann gilt $\mathrm{ht}(P) \leq 1$.

Aufgabe 4.1 **[2+2 Punkte]**

(a) Leiten Sie für endlich erzeugte abelsche Gruppen ein Analogon zu dem *Struktursatz für endlich erzeugte Moduln über HIR* (Satz 6.8) her.

(b) Formulieren und begründen Sie eine Präzisierung Ihrer Formulierung aus (a) für endliche abelsche Gruppen.

Lösung:

Aufgabe 4.2 **[2+2 Punkte]**

(a) Erstellen Sie eine vollständige Liste aller $\mathbb{Z}$-Moduln der Mächtigkeit 180 bis auf Isomorphie.

(b) Erstellen Sie eine vollständige Liste aller abelschen Gruppen der Mächtigkeit 1350 bis auf Isomorphie.

Lösung:

Aufgabe 4.3 **[1+1+2 Punkte]**

Sei R ein noetherscher Integritätsbereich.

(a) Zeigen Sie, dass jede Nicht-Einheit $a \in R \backslash \{0\}$ ein Produkt irreduzibler Elemente von R ist.

(b) Beweisen Sie, dass falls jedes irreduzible Element von R ein Primelement ist, dann R schon ein faktorieller Ring ist.

(c) Zeigen Sie, dass R genau dann faktoriell ist, wenn jedes Primideal von R der Höhe 1 ein Hauptideal ist.
Hinweis: Sie dürfen ohne Beweis den Krullschen Hauptidealsatz verwenden.

Lösung:

Aufgabe 4.4* **[2+2 Punkte]**

(a) Erarbeiten Sie ein Beispiel eines noetherschen faktoriellen Integritätsbereiches der kein Hauptidealbereich ist.

(b) Erarbeiten Sie ein Beispiel eines faktoriellen Integritätsbereiches der nicht noethersch ist.

Lösung:

Abgabe: Bis **Donnerstag, den 20. Mai 2021, um 10:00 Uhr**, direkt an den Tutor. Wir bitten die allgemeinen Hinweise zur Abgabe von Lösungen (siehe Homepage) zu beachten.